Keller

SS 2007
26.07.2007

10. Übung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Hinweis: Die Besprechung der Aufgaben dieses Blatts fand in der Übung am Montag, dem 21.05.2007, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 statt.

Aufgabe 46

Sei X eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ definierte reellwertige Zufallsvariable, deren Erwartungswert existiert. Stellen Sie in folgenden Fällen die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X in einem gemeinsamen Schaubild dar:

(a) $P^X = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \delta_{x_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_0 = 0$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_0 < \ldots < x_n$ und $p_1, \ldots, p_n \in (0, 1)$;

(b) $X \sim Exp(\lambda)$ mit $\lambda > 0$;

(c) X beliebig.

Hinweise: Es genügt in (a), den Spezialfall $n = 3$ zu betrachten. Aufgabe 46 wurde in der Vorlesung am Dienstag, dem 22.05.2007, als Beispiel 5.53 formuliert.

Aufgabe 47

(a) Sei X eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ definierte Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit Werten in $\mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$E(X_{(1)}) = \sum_{k=1}^{\infty} (P(X_1 \geq k))^n.$$

(c) Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $\mathfrak{S}$ liegende Folge. Definieren und interpretieren Sie eine Zufallsvariable X auf dem angegebenen Wahrscheinlichkeitsraum mit $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. Diskutieren Sie insbesondere den Spezialfall, dass die Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt sind.

Aufgabe 48

Beim 2-maligen unabhängigen Werfen eines ungefälschten Würfels beschreibe die Zufallsvariable X_i mit Werten in $\{1, \ldots, 6\}$ die Augenzahl des i-ten Wurfs, $i = 1, 2$. Berechnen Sie

(a) $E(X_{(1)})$, (b) $E(X_{(1)}^2)$ und (c) $E(X_1 \cdot X_{(1)})$.

Aufgabe 49

Sie warten auf zwei Freunde, deren Ankunftszeiten unabhängig identisch geometrisch verteilt sind. Berechnen Sie die zu erwartende Zeit bis zur Ankunft des später eintreffenden Freundes unter der Annahme, dass Sie auf jeden Einzelnen im Mittel 10 Minuten warten müssen.

Aufgabe 50

Ein Ehepaar plant, so viele Kinder zu bekommen, bis es sowohl ein Mädchen als auch einen Jungen hat. Berechnen Sie die für dieses Ehepaar zu erwartende Anzahl von Kindern.