

## 9. Übung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Hinweis: Die Besprechung der Aufgaben dieses Blatts fand in der Übung am Montag, dem 07.05.2007, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 statt.

### Aufgabe 41

Seien  $X_1, X_2$  i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  mit Werten in  $\{-1, 1\}$  und  $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = 1/2$ . Außerdem sei  $X_3 = X_1 \cdot X_2$ .

- (a) Bestimmen Sie die Verteilung von  $\mathbf{Z} = (X_1, X_3)$ .
- (b) Untersuchen Sie, ob  $X_1$  und  $X_3$  unabhängig sind.
- (c) Untersuchen Sie, ob die Familie  $(X_i)_{i \in I}$  mit  $I = \{1, 2, 3\}$  unabhängig ist.

### Aufgabe 42

Sei  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  eine 3-dimensionale Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  mit Werten in  $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  und  $P(X = x) = 1/4$  für alle  $x \in A$ .

- (a) Bestimmen Sie für  $i = 1, 2, 3$  die Verteilung von  $X_i$ .
- (b) Untersuchen Sie, ob  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig sind.
- (c) Untersuchen Sie, ob die Familie  $(X_i)_{i \in I}$  mit  $I = \{1, 2, 3\}$  unabhängig ist.

### Aufgabe 43

- (a) Sei  $Z$  eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  mit Werten in  $\mathbb{Z}$ . Zeigen Sie für  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k - 1) = P(Z > k - 1) - P(Z > k).$$

- (b) Seien  $X, Y$  i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  mit Werten in  $\mathbb{Z}$ . Zeigen Sie für  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$P(\min(X, Y) = k) = (P(X > k - 1))^2 - (P(X > k))^2.$$

Hinweis: Für reellwertige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  nennt man

$$X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{bzw.} \quad X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

die 1-te bzw.  $n$ -te *Ranggröße* (engl.: *order statistics*).

#### Aufgabe 44

Seien  $X, Y$  i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  mit Werten in  $\mathbb{N}_0$  und  $X \sim G(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ . Zeigen Sie:  $\min(X, Y) \sim G(p \cdot (2 - p))$ .  
Hinweise: Für  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt  $P(X = k) = (1 - p)^k \cdot p$ . Beachten Sie auch Beispiel 3.36 f).

#### Aufgabe 45

- (a) Seien  $X$  eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  definierte Zufallsvariable mit  $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die auf der Menge  $X(\Omega)$  Laplace-verteilt ist. Berechnen Sie  $E(X)$  und  $E(X^2)$ .
- (b) Wie viele Richtige sind beim Lotto 6 aus 49 zu erwarten?

Hinweis: Beachten Sie zu (b) Aufgabe 23 (a).