Keller

SS 2007
26.07.2007

8. Übung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Hinweis: Die Besprechung der Aufgaben dieses Blatts fand in der Übung am Montag, dem 23.04.2007, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 statt.

Aufgabe 36

Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n das Ereignis, dass beim Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit $(n+1)^2$ nummerierten Kugeln genau die n-te Kugel nicht gezogen wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

(a) $\inf A_n$, (b) $\underline{\lim}\, A_n$ (c) $\overline{\lim}\, A_n$ und (d) $\sup A_n$.

Hinweis: Beachten Sie auch Satz 4.48.

Aufgabe 37

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X=-2) = 1/5$, $P(X=-1) = 1/6$, $P(X=0) = 1/5$, $P(X=1) = 1/15$ und $P(X=2) = 11/30$. Außerdem sei $Y = X^2$.

(a) Berechnen Sie $P(|X-2| > 1)$.

(b) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von Y.

Aufgabe 38

Beim 3-maligen unabhängigen Werfen einer ungefälschten Münze wird nur beobachtet, wie oft Kopf in den ersten beiden und in den letzten beiden Würfen fällt.

(a) Konstruieren Sie für dieses Experiment ein Modell mit einem Wahrscheinlichkeitsraum und einer darauf erklärten 2-dimensionalen Zufallsvariablen.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung der in (a) erklärten Zufallsvariablen und die zugehörigen 1-dimensionalen Randverteilungen.

Aufgabe 39

Seien $A = [-1,1]^2$ und $\mathbf{Z} = (X,Y)$ eine 2-dimensionale Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit der durch

$$f_{\mathbf{Z}}(x,y) = \frac{1}{4} \cdot (1 + x \cdot y) \cdot \mathbf{1}_A(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

definierten R-Dichte. Zeigen Sie, dass X eine R-Dichte besitzt.
Hinweis: Beachten Sie in der Vorlesung am Dienstag, dem 17.07.2007, die Bedeutung von Satz 8.12 (*Satz von Tonelli*) für diese Aufgabe.

Aufgabe 40

(a) Seien X, Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim B(1,p)$ und $Y \sim B(1,q)$, $p, q \in (0,1)$. Zeigen Sie: $X \cdot Y \sim B(1, p \cdot q)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage in (a) ohne die Voraussetzung der Unabhängigkeit von X und Y falsch ist.

(c) Finden Sie zwei 2-dimensionale Zufallsvariablen $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ und $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P^{X_i} = P^{Y_i} = B(1, 1/2)$ für $i = 1, 2$ und $P^{\mathbf{X}} \neq P^{\mathbf{Y}}$.