H.-D. Keller 21.02.2010

Wahrscheinlichkeitsrechnung I (WS 2009/2010)
Übungsblatt 7
Besprechung: 7. Woche

Aufgabe 31
Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit $P(X = -2) = 1/5$, $P(X = -1) = 1/6$, $P(X = 0) = 1/5$, $P(X = 1) = 1/15$ und $P(X = 2) = 11/30$. Außerdem sei $Y = X^2$.

(a) Berechnen Sie $P(|X - 2| > 1)$.

(b) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von Y.

Aufgabe 32
Beim 3-maligen unabhängigen Werfen einer ungefälschten Münze wird nur beobachtet, wie oft Kopf in den ersten beiden und in den letzten beiden Würfen fällt.

(a) Konstruieren Sie für dieses Experiment ein Modell mit einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum und einer darauf erklärten 2-dimensionalen Zufallsvariablen.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung der in (a) erklärten Zufallsvariablen und die zugehörigen 1-dimensionalen Randverteilungen.

Aufgabe 33

(a) Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit $X \sim B(p)$ und $Y \sim B(q)$, $p, q \in (0, 1)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

   (i) X und Y sind unabhängig.

   (ii) $X \cdot Y \sim B(p \cdot q)$.

   Zeigen Sie, dass (ii) aus (i) folgt.

(b) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit $X \sim B(p)$, $p \in (0, 1)$. Finden Sie eine reellwertige Zufallsvariable Y auf (Ω, P) mit $Y \sim B(p)$, $p \in (0, 1)$, und der Eigenschaft, dass X und Y nicht unabhängig sind.

(c) Finden Sie 2 2-dimensionale Zufallsvariablen $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ und $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit $P^{X_i} = P^{Y_i} = B(1/2)$, $i = 1, 2$, und $sp_+(P^{\mathbf{X}}) \cap sp_+(P^{\mathbf{Y}}) = \emptyset$.

Aufgabe 34
Seien X_1, X_2 i.i.d. Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit Werten in $\{-1, 1\}$ und $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = 1/2$. Außerdem seien $X_3 = X_1 \cdot X_2$ und $I = \{1, 2, 3\}$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $\mathbf{Z} = (X_1, X_3)$.

(b) Untersuchen Sie, ob X_1 und X_3 unabhängig sind.

(c) Untersuchen Sie, ob die Familie $(X_i)_{i \in I}$ unabhängig ist.

Aufgabe 35

Sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ eine 3-dimensionale Zufallsvariable auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit Werten in $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ und $P(\mathbf{X} = x) = 1/4$ für alle $x \in A$. Außerdem sei $I = \{1, 2, 3\}$.

(a) Bestimmen Sie für $i \in I$ die Verteilung von X_i.

(b) Untersuchen Sie, ob X_1 und X_2 unabhängig sind.

(c) Untersuchen Sie, ob die Familie $(X_i)_{i \in I}$ unabhängig ist.