H.-D. Keller 21.02.2010

Wahrscheinlichkeitsrechnung I (WS 2009/2010)
Übungsblatt 6
Besprechung: 5. Woche

Aufgabe 26
Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie: Für $A, B \subset \Omega$ mit $P(B) \in (0,1)$ sind A, B genau dann unabhängig, wenn $P(A|B) = P(A|B^c)$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle Ereignisse, die von sich selbst unabhängig sind.

Aufgabe 27
Seien (Ω, P) der durch $\Omega = \{1,2,3,4\}$ und die Laplace-Verteilung P auf Ω definierte diskrete Wahrscheinlichkeitsraum, $I = \{1,2,3\}$ und $A_i = \{i, 4\}$, $i \in I$. Zeigen Sie:

(a) $(A_i)_{i\in I}$ ist paarweise unabhängig.

(b) $(A_i)_{i\in I}$ ist nicht unabhängig.

Aufgabe 28 (Satz 3.27)
Seien (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $I = \{1, \ldots, n\}$ und $A_i \subset \Omega$, $i \in I$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $(A_i)_{i\in I}$ ist unabhängig.

(ii) Für jede Wahl von $B_1, \ldots, B_n$ mit $B_i \in \{A_i, \Omega\}$, $i \in I$, gilt

$$P(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1) \cdot \ldots \cdot P(B_n).$$

(iii) Für jede Wahl von $B_1, \ldots, B_n$ mit $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$, $i \in I$, gilt

$$P(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1) \cdot \ldots \cdot P(B_n).$$

Zeigen Sie die Äquivalenz von (i) und (ii).

Aufgabe 29 (Beispiel 3.45 *Ziegenproblem*)
Folgende Aufgabe ist als *Ziegenproblem* bekannt: In einer Talkshow steht hinter einer von 3 verschlossenen Türen mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede Tür als Hauptgewinn ein Auto, während hinter den beiden anderen je eine Ziege zu finden ist. Der Kandidat wählt eine der 3 Türen. Der über die Position des Autos informierte Talkmaster öffnet eine der beiden anderen Türen, hinter denen die Ziegen stehen, und zwar auch mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede Tür, falls er die Wahl hat. Danach darf der Kandidat sich noch umentscheiden. Soll er das tun?

Aufgabe 30 (Beispiel 3.46, *Pólyasches Urnenmodell*)
Seien $c, r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $r + s \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird rein zufällig eine Kugel entnommen. Anschließend wird die gezogene Kugel zusammen mit c Kugeln derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Insgesamt wird der Vorgang dann noch $(n-1)$-mal wiederholt. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, bei n Ziehungen stets eine rote Kugel zu ziehen, gleich $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{r+ic}{r+s+ic}$ ist. Was ergibt sich für $r = s = c$?