H.-D. Keller

WS 2006/07
23.01.2007
Blatt 6

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Hinweis: Die Aufgaben werden in der Übung am Dienstag, dem 23.01.2007, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 besprochen.

Aufgabe 26
Ein Fabrikant verspricht die Lieferung einer Ware zu einem festen Zeitpunkt. Die Lieferzeit unterliegt aber wegen unvorhersehbarer Einflüsse Schwankungen, sodass ein Zufallsexperiment vorliegt, bei dem die Abweichung vom versprochenen Liefertermin beobachtet wird. Als Modell soll daher ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $(\Omega, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1_*)$ betrachtet werden. Dabei seien $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$F(x) \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq -1, \\ 3/4 \cdot x - 1/4 \cdot x^3 + 1/2, & \text{falls } -1 < x \leq 1, \\ 1, & \text{falls } x > 1, \end{cases}$$

also $F(x) = (\frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{2}) \cdot \mathbf{1}_{(-1,+1]}(x) + \mathbf{1}_{(+1,+\infty)}$ definierte Verteilungsfunktion und P die zu F korrespondierende Wahrscheinlichkeitsverteilung.

(a) Berechnen Sie $P([0, 1])$.

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $P([a, b]) = 1$.

(c) Berechnen Sie $P(\mathbb{Q})$.

(d) Berechnen Sie zu F eine R-Dichte.

Aufgabe 27 (Definition 4.8 und Beispiel 4.9, *Simpson-Paradoxon*)
Konstruieren Sie eine Hochschule mit zwei zulassungsbeschränkten Fächern F_1 und F_2 und je 100 weiblichen und männlichen Bewerbern (für beide Fächer zusammen), sodass in jedem Fach die Annahmequote für Frauen größer ist als für Männer, insgesamt aber mehr Männer als Frauen angenommen werden. Erklären Sie dieses Phänomen mit dem *Simpson-Paradoxon*.

Aufgabe 28 (Satz 4.14, *allgemeine Multiplikationsregel*)
Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}$ mit der Eigenschaft $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Zeigen Sie:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Aufgabe 29 (Beispiel 4.15, *Pólyasches Urnenmodell*)
Seien $c, r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $r + s \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird rein zufällig eine Kugel entnommen. Anschließend wird die gezogene

Kugel zusammen mit c Kugeln derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Insgesamt wird der Vorgang dann noch $(n-1)$-mal wiederholt. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, bei n Ziehungen stets eine rote Kugel zu ziehen, gleich $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{r+ic}{r+s+ic}$ ist. Was ergibt sich für $r = s = c$?

Aufgabe 30 (*Ziegenproblem*)
Folgende Aufgabe ist als *Ziegenproblem* bekannt: In einer Talkshow steht hinter einer von 3 verschlossenen Türen mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede Tür als Hauptgewinn ein Auto, während hinter den beiden anderen je eine Ziege zu finden ist. Der Kandidat wählt eine der 3 Türen. Der über die Position des Autos informierte Talkmaster öffnet eine der beiden anderen Türen, hinter denen die Ziegen stehen, und zwar auch mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede Tür. Danach darf der Kandidat sich noch umentscheiden. Soll er das tun?