H.-D. Keller

WS 2006/07
09.01.2007
Blatt 5

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Hinweis: Die Aufgaben werden in der Übung am Dienstag, dem 09.01.2007, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 besprochen.

Aufgabe 21

Seien $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum und $P : \mathfrak{S} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine nicht negative, normierte Abbildung. Außerdem gelte $P(A + B) = P(A) + P(B)$ für alle $A, B \in \mathfrak{S}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) P ist endlich additiv.

(b) Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{S}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(c) Gilt für jede in $\mathfrak{S}$ liegende Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $B_n \downarrow \emptyset$ auch $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$, so ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathfrak{S})$.

Aufgabe 22

Seien $n, r, s \in \mathbb{N}$.

(a) Überlegen Sie im Zusammenhang mit dem *Paradoxon des Chevalier de Meré* in Beispiel 2.28 eine Änderung der Regeln für das Spiel II mit 2 unverfälschten Würfeln, bei der die Bank im Vorteil wäre.

(b) Jemand betritt einen Raum, in dem sich bereits n Personen aufhalten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter diesen n Personen mindestens eine Person befindet, die am selben Tag wie die zuletzt eingetretene Person Geburtstag hat. Betrachten Sie in diesem Zusammenhang auch das *Geburtstagsproblem* in Beispiel 2.29.

(c) r rote und s schwarze Würfel sollen sukzessive rein zufällig nacheinander in eine Reihe geordnet werden. Berechnen Sie unter der Voraussetzung $r \geq 2$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich in den zwei Positionen an beiden Enden der Reihe eine rote Kugel befindet. Finden Sie mindestens drei Lösungswege.

(d) Jemand nimmt $2n$ gleich lange Schnüre so in seine Hand, dass nur noch sichtbar zu beiden Seiten der Faust die Enden von $2n$ Schnüren herausragen. Auf jeder Seite sollen die Schnurenden paarweise und rein zufällig zusammengebunden werden. Berechnen Sie unter der Voraussetzung $n \geq 2$ die Wahrscheinlichkeit, dass dabei ein Ring entsteht.

Aufgabe 23

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp beim Lotto „6 aus 49“

(a) genau k Richtige, $k = 0, \dots, 6$, und

(b) genau k Richtige mit Zusatzzahl, $k = 0, \dots, 5$, zu erzielen.

Aufgabe 24

Bei der ersten Ziehung der *Glücksspirale* 1971 wurden für die Ermittlung einer 7-stelligen Gewinnzahl aus einer Trommel, die Kugeln mit den Ziffern $0, 1, \dots, 9$ je 7-mal enthielt, nacheinander rein zufällig 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

(a) Welche 7-stelligen Gewinnzahlen hatten hierbei die größte und die kleinste Ziehungswahrscheinlichkeit und wie groß sind diese Wahrscheinlichkeiten?

(b) Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Zahl 3 143 643.

(c) Wie würden Sie den Ziehungsmodus abändern, um allen Gewinnzahlen die gleiche Ziehungswahrscheinlichkeit zu sichern?

Aufgabe 25

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$ surjektive Abbildungen von $\{1, \dots, m\}$ nach $\{1, \dots, n\}$.

(b) Es gilt $\sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \binom{2n}{i} (2n-i)^n = 0$.

(c) Es gilt $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n = n!$.