H.-D. Keller

WS 2006/07
10.12.2006
Blatt 4

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Hinweis: Die Aufgaben werden in der Übung am Dienstag, dem 12.12.2006, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 besprochen.

Aufgabe 16

Seien $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum, $\widetilde{\Omega}$ ein weiterer Grundraum und $X : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $\widetilde{\mathfrak{S}} = \{X^{-1}(A) : A \in \mathfrak{S}\}$ ist eine σ-Algebra über $\widetilde{\Omega}$.

(b) Für alle $A \subset \Omega$ gilt $\mathbf{1}_A \circ X = \mathbf{1}_{X^{-1}(A)}$.

Aufgabe 17

Seien $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathfrak{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra über Ω ist.

(b) Finden Sie eine nicht leere Indexmenge I und dazu Mengen $A_i \in \mathfrak{S}$, $i \in I$, mit

$$\bigcup_{i \in I} A_i \notin \mathfrak{S}.$$

Aufgabe 18

(a) Seien $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum, $n \in \mathbb{N}$ und $P_1, \ldots, P_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße über $(\Omega, \mathfrak{S})$. Zeigen Sie, dass durch

$$P(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_i(A),\ A \in \mathfrak{S},$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathfrak{S})$ definiert ist.

(b) Seien Ω eine Grundmenge, $n \in N$ und $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$. Zeigen Sie, dass durch

$$P(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_A(\omega_i),\ A \in \mathfrak{P}(\Omega),$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ definiert ist.

(c) Verallgemeinern Sie die in (a) formulierte Aussage.

Aufgabe 19

Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine nicht leere, abzählbare Indexmenge und $A, B, A_i \in \mathfrak{S}$, $i \in I$. Zeigen Sie:

(a) Aus $P(A) \geq 0,96$ und $P(B) \geq 0,95$ folgt $P(A \cap B) \geq 0,91$.

(b) Es gilt $\inf \{P(A_i) : i \in I\} \geq P(\bigcap_{i \in I} A_i) \geq 1 - \sum_{i \in I}(1 - P(A_i))$.

(c) Sind alle A_i, $i \in I$, fast sicher, so ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ ebenfalls fast sicher.

Aufgabe 20

Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\{\omega\} \in \mathfrak{S}$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\Omega_0 = sp_+(P)$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes nicht leere, abzählbare Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

(b) Ω_0 ist abzählbar.

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  (i) Für jedes nicht leere Ereignis $A \in \mathfrak{S}$ gilt $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

  (ii) Ω_0 ist ein Träger von P.

(d) Gilt in (c) eine der beiden äquivalenten Aussagen (i) und (ii), so ist Ω_0 der kleinste Träger von P, d. h. für jeden anderen Träger Ω_* von P folgt $\Omega_0 \subset \Omega_*$.