H.-D. Keller 21.02.2010

Wahrscheinlichkeitsrechnung I (WS 2009/2010)
Übungsblatt 3
Besprechung: 50. und 51. Woche

Aufgabe 11 (Fortsetzung von Aufgabe 9 (b))
Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Der in Verallgemeinerung des *Binomialkoeffizienten* für $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{j=1}^k i_j = n$ durch

$$\binom{n}{i_1, \ldots, i_k} = \frac{n!}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_k!}$$

definierte *Multinomialkoeffizient* nimmt genau dann den größten Wert an, wenn $|i_r - i_s| \leq 1$ für alle $r, s \in \{1, \ldots, k\}$ gilt.

(b)

$$\left(\sum_{i=1}^k x_i\right)^n = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + \ldots + i_k = n}} \binom{n}{i_1, \ldots, i_k} \cdot x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k}.$$

Hinweis: Die Aussage in (b) heißt *multinomialer Lehrsatz.*

Aufgabe 12 (Beweis zu Satz 1.28)
Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq n$ und $M = \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\begin{aligned} A &= Kom_k^n(oW) \\ B &= \mathfrak{P}_k(M) \quad \text{und} \\ C &= \left\{ f \in \{0,1\}^M : \sum_{i=1}^n f(i) = k \right\}, \end{aligned}$$

gleichmächtig sind, indem Sie Bijektionen $\phi : A \to B$ und $\psi : C \to B$ angeben.

Aufgabe 13
Seien $a, b, n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Anzahl aller Pfade $\sigma = (s_1, \ldots, s_n)$ der Länge n mit

$$s_i > -a, \; i = 1, \ldots, n-1, \; \text{und} \; s_n = b.$$

Aufgabe 14
Seien $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum, $\widetilde{\Omega}$ ein weiterer Grundraum und $X : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ eine Abbildung. Zeigen Sie

(a) $\widetilde{\mathfrak{S}} = \{X^{-1}(A) : A \in \mathfrak{S}\}$ ist eine σ-Algebra über $\widetilde{\Omega}$.

(b) Für alle $A \subset \Omega$ gilt $\mathbf{1}_A \circ X = \mathbf{1}_{X^{-1}(A)}$.

Aufgabe 15

Seien $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathfrak{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra über Ω ist.

(b) Finden Sie eine nicht leere Indexmenge I und dazu Mengen $A_i \in \mathfrak{S}$, $i \in I$, mit

$$\bigcup_{i \in I} A_i \notin \mathfrak{S}.$$