H.-D. Keller

WS 2006/07
27.11.2006
Blatt 3

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Hinweis: Die Aufgaben werden in der Übung am Dienstag, dem 28.11.2006, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 besprochen.

Aufgabe 11

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : \{0, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ die durch $f(k) = \binom{n}{k}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$, definierte Abbildung. Zeigen Sie: f ist auf der Menge $\{0, \ldots, [n/2]\}$ monoton wachsend.

Aufgabe 12 (Fortsetzung von Aufgabe 9 (b))

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Der in Verallgemeinerung des *Binomialkoeffizienten* für $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{j=1}^k i_j = n$ durch

$$\binom{n}{i_1, \ldots, i_k} = \frac{n!}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_k!}$$

definierte *Multinomialkoeffizient* nimmt genau dann den größten Wert an, wenn $|i_r - i_s| \leq 1$ für alle $r, s \in \{1, \ldots, k\}$ gilt.

(b)

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right)^n = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + \ldots + i_k = n}} \binom{n}{i_1, \ldots, i_k} \cdot x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k}.$$

Hinweis: Die Aussage in (b) heißt *multinomialer Lehrsatz.*

Aufgabe 13

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq n$ und $M = \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \left\{ f \in \{0,1\}^M : \sum_{i=1}^{n} f(i) = k \right\}, \\ B &= Kom_k^M(oW) \quad \text{und} \\ C &= \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in M^k : x_1 < \ldots < x_k \right\} \end{aligned}$$

gleichmächtig sind, indem Sie bijektive Abbildungen $\phi : A \to B$ und $\psi : C \to B$ angeben.

Hinweis: Beachten Sie Definition 1.12, Definition 1.25, Definition 1.26 und Bemerkung 1.27.

Aufgabe 14

Seien $a, b, n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Anzahl aller Pfade $\sigma = (s_1, \ldots, s_n)$ der Länge n mit

$$s_i > -a,\ i = 1, \ldots, n-1, \ \text{ und } \ s_n = b.$$

Aufgabe 15

Berechnen Sie zu der in (a) bzw. (b) definierten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die jeweils zugehörige erzeugende Funktion:

(a) $a_n = \binom{m}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{m-n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit fest vorgegebenen Zahlen $m \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$;

(b) $a_n = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit einer fest vorgegebenen Zahl $\lambda > 0$.