H.-D. Keller 21.02.2010

Wahrscheinlichkeitsrechnung I (WS 2009/2010)
Übungsblatt 1
Besprechung: 46. Woche

Aufgabe 1 (*Verschiebungsformel von Steiner*)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n, c \in \mathbb{R}$. In der statistischen Praxis werden zur Auswertung einer konkreten Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ vom Umfang n statistische Maßzahlen herangezogen, die bestimmte Eigenschaften der Stichprobe durch einen Zahlenwert kennzeichnen. Von besonderer Bedeutung sind dabei der Mittelwert $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ sowie im Fall $n \neq 1$ die empirische Streuung $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ und die empirische Standardabweichung $+\sqrt{s^2}$. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + (c - \overline{x})^2;$

(b) $\displaystyle \frac{n-1}{n}s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2.$

Aufgabe 2
Seien M und N Mengen, $f : M \to N$ eine Abbildung und $A \subset M$, $B \subset N$ Teilmengen.

(a) Vergleichen Sie A und $f^{-1}(f(A))$.

(b) Vergleichen Sie B und $f(f^{-1}(B))$.

(c) Berechnen Sie $f^{-1}(f(A))$ für $M = N = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$ und $f \equiv 1$.

(d) Berechnen Sie $f(f^{-1}(B))$ für $M = N = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ und $f \equiv 1$.

(e) Berechnen Sie $f^{-1}(B)$ für $M = N = \mathbb{R}$, $B = [1, 4]$ und $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (Satz 1.12, Eigenschaften der *Indikatorfunktion*)
Seien Ω eine nicht leere Grundmenge, $A, B, A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, und $I \subset \mathbb{N}$ eine nicht leere endliche Teilmenge. Dann bestehen folgende Beziehungen:

(1) $\mathbf{1}_\emptyset \equiv 0$; $\mathbf{1}_\Omega \equiv 1$;

(2) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \wedge \mathbf{1}_B = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$;

(3) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A \vee \mathbf{1}_B = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$;

(4) $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = 1 - \prod_{i\in I}(1 - \mathbf{1}_{A_i}) = \sum\limits_{\emptyset\neq J\subset I} (-1)^{|J|+1}\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{j\in J} A_j}$;

(5) $\mathbf{1}_{A+B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ für disjunkte Mengen A und B;

(6) $\mathbf{1}_{A\setminus B} = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^+ = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$;

(7) $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$;

(8) $\mathbf{1}_{A \triangle B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|$;

(9) $\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}$;

(10) $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}$;

(11) $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m} = \underline{\lim}\, \mathbf{1}_{A_n}$;

(12) $\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m} = \overline{\lim}\, \mathbf{1}_{A_n}$.

Beweisen Sie Aussage (8).
<u>Hinweis</u>: Wegen (9)-(12) definiert man

$$\inf A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \ \sup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{m+n} \text{ und}$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m+n}.$$

<u>Aufgabe 4</u>
Seien Ω eine nicht leere Grundmenge und $A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $\underline{\lim}\, A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$;

(b) $\overline{\lim}\, A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$;

(c) $\underline{\lim}\, A_n \subset \overline{\lim}\, A_n$;

(d) $\underline{\lim}\, A_n = (\overline{\lim}\, A_n^c)^c$.

<u>Aufgabe 5</u>
Seien Ω eine nicht leere Grundmenge, $A, A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ und $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen A (in Zeichen: $A_n \to A$ oder $\lim_{n\to\infty} A_n = A$), wenn $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = A$ gilt. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ antiton, d. h. $A_n \supset A_{n+1} \,\forall\, n \in \mathbb{N}$ (in Zeichen: $A_n \downarrow$), so konvergiert sie gegen B (in Zeichen: $A_n \downarrow B$).

(b) Ist die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ isoton, d. h. $A_n \subset A_{n+1} \,\forall\, n \in \mathbb{N}$ (in Zeichen: $A_n \uparrow$), so konvergiert sie gegen C (in Zeichen: $A_n \uparrow C$).